Université Abdelmalek ESSAADI (UAE)
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima, Maroc

Professeur A. MOUSSAID
Année Universitaire 2019/2020

AP1: Analyse 2

Devoir Libre
A Rendre le 30/06/2020

Problème 1

1. *soit p un entier ≥ 1 fixé, Determiner l'ensemble des valeurs pour les quelles les sériies suivantes convergent simplement:*
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n^p}}{n^p}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^p-1}$$
2. *pour $p = 1$, calculer les sommes de ces séries.*
3. *Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ n'est pas uniformement convergente sur $[0, 1]$*
4. *Pour chaque $x \in [0, 1]$, montrer que l'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$ converge, on notra $g(x)$ sa valor.*
5. *Montrer que $\forall \alpha \in [0, 1]$, g est dérivable sur $]0, \alpha[$*
6. *En deduire que g est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer sa derivée*
7. *Pour $n \geq 2$, on pose $g_n(x) = \int_1^{+\infty} \frac{x^t}{t} dt$*
Montrer que g_n est indefiniment dérivable sur $[0, 1]$
8. *Montrer que g_n converge uniformement sur $[0, \alpha]$, avec $\alpha \in [0, 1[$*

Problème 2

I) - Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme.

A) - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ *(on rappelle que : $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$)*

B) - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cos(n\theta), \qquad \theta \in \mathbb{R}$

II)
1. *-Déterminer le développement en série entiére de la fonction $x \to \log(1 - x)$*
2. *- Soit la série entiére $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 - 1}$*

A. Déterminer son rayon de convergence R
B. calculer sa somme $S(x)$ pour $|x| < R$
C. Montrer que la série est uniformément convergente sur $[-1, 1]$, en déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

Bon Courage